数理解析研究所講究録
1109巻 1999年 42-52

On a combinatorial approach to some Cayley graphs

山崎 則男 (Norio YAMAZAKI)
九州大学大学院数理学研究科

1 序

本稿では、群アソシエーションスキームのパラメータによる特徴付け問題における1つの接近法について述べたい。ここで述べたい事の一部は[5]で既に記しているので参照されたし。

以降、Gを一般の有限群、$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を$G$の共役類全体とし、

$$R_\lambda^* = \{(g,h)\in G\times G \mid g^{-1}h\in C_\lambda\}$$

$(\lambda\in\Lambda)$とする。この時、一般に$\mathcal{X}(G)=(G,\{R_\lambda^*\}_{\lambda\in\Lambda})$は可換アソシエーションスキームとなり、これを我々は群(アソシエーション)スキームと呼ぶ。

$\mathcal{X}=(X,\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$を(アソシエーションスキームとしての)パラメータ$\{p_{\lambda_2,\lambda_3}^{\lambda_1}\}_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\Lambda}$が$\mathcal{X}(G)$のパラメータと一致するアソシエーションスキームとした時、そのような$\mathcal{X}$を分類せよ、という問題が、群スキームのパラメータによる特徴付け問題と呼ばれるものである。(一般にそのような$\mathcal{X}$は一意的とは限らない。そのような例については、例えば[1], [7]を参照の事。)

さて、[1], [2], [4]で$A_5, PSL(2,7), S_n$ $(n\geq 5)$においてこの問題がそれぞれ解決されている(いずれも一意性が示される)が、それらのいずれも、

『$\mathcal{X}(G),\mathcal{X}$における1つの(共役類に対応する)関係$R_{\lambda_0}^*$, R_{λ_0}に着目し、それらをそれぞれ辺集合とする(一般には向きを持つ)グラフ$\Gamma^*=(G,R_{\lambda_0}^*)$, $\Gamma=(X,R_{\lambda_0})$の間の同型写像を構成する』

部分が証明の根幹を成す。Γ^*は「共役類C_{λ_0}に関するケイリーグラフ」であり、「ケイリーグラフの(局所的)パラメータによる特徴付け」問題として本稿ではこの部分に的をしぼって議論をすすめていきたい。(それが上述の題目を付けた理由でもある。)特に、テーマとして、

『ケイリーグラフにおいて、その局所構造から全体構造が決定されていく組合せ的メカニズムを解明する』

事を目指したい。

2 「局所的接近法」における問題点

一般的にアソシエーションスキーム$\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_i)$ の１つの関係R_1により定義されるグラフ$\Gamma=(X,R_1)$ をパラメータから特徴付けようとする場合、(i) パラメータにより局所構造を決定し、(ii) 局所構造の貼りあわせにより全体構造を決定する、という大きく分けて２つのステップを踏んでグラフを決定する方法が最も自然であると思われ、実際[1],[2],[4] においてその方法がとられた。この方法を「局所的接近法」とでも呼ぶならば、それをより一般化、理論化することはできないであろうか？

局所的接近法でグラフの特徴付けをしようとする際、次のような問題点が以降出てくる事が予想される。

(1) パラメータによる特徴付けに取り組む際、全て（と言わないまでもできるだけ多く）のアソシエーションスキームのパラメータ$\{p^k_{i,j}\}_{i,j,k}$ が用意されている事が理想であるが、例えば無限系列の群についてはパラメータを無限個求める事は非常に大変な作業である。

(2) (1) の困難を解消するため、[4] では、まずXの１点を固定し、それをS_n の単位元 (id) と同一視し、Xの点をS_nの元と同一視しながらグラフを徐々に (idから距離が近い順に) 復元していき、最終的に全てのXの点がS_nの点と同一視できる時点で、同時にS_nの互換全体（で構成される共役類）におけるケイリーグラフの復元が完了する、という方法が取られた。「パラメータの情報からケイリーグラフを復元する」という方針自体は一般的であると思われる一方、[4] においては、「S_nの各元がn点上の置換により記述できる」事が問題解決をより容易にしていた、という面があり、点を群の元と同一視する（点にラベルを付ける）方法は一般的とは言えないのではないか？

(3) 群スキームは１章で述べたように共役類から定義される。よって、群スキームの特徴付けをするためには、その群のそれぞれの共役類の特性を何らかの対象と対応させるなどしてとらえていく必要があると思われるが、例えばS_nやA_nなどはそれが容易である一方、それさえ容易にならない群も数多く存在すると思われる。その一方、１つの共役類のケイリーグラフを特徴付ける事を目標とする際には、その困難をさける方法があるのではないか、つまり、その問題は「１つのケイリーグラフの特徴付け」とは独立した問題なのでは？

(4) アソシエーションスキームの表現論的理論 (spherical representation の理論) が有効に使えないであろうか？それがより多くのパラメータの情報を使うための鍵であると思われる。((1) を考えた上でも。) 実際[4] では少しそれが使われているが、もっと本質的に使う技術、理論があればよいのであるが。筆者の個人的見解としては、例えば多くの（ほとんど全ての）群において「局所構造を決定する」際にその理論が不可欠になると確信しており（ここでの「局所構造」とは、例えば[3] でのような、単に１点のグラフ近傍内の構造、という意味で用いているのではない事に注意)、それを含めた表現論的研究に非常に魅力を感じている。

次章より、これらの問題 ((4) については本稿では考慮しない) を解消すべく進めている筆者の研究の紹介をしたい。

3　局所構造の決定

筆者は [5] において、[4] における本質的部分である「S_nの互換全体におけるケイリーグラフの、ある局所構造の仮定を付けた上でのパラメータによる特徴付け」のゆるやかな一般化に成功した事を報告し、(斜交型の) 3互換の群の問題に挑戦したいという意志を表明したが、本章と次章でその詳細を述べたい。そもそも筆者によるこの研究は、ケイリーグラフの特徴付け問題への「局所的接近法」をより理論化したいという動機で始められたものであり ([3] の結果も動機の1つであるが)、「3互換の群」という枠組みでこの問題に取り組む方がより議論を一般的にできるのでは、という期待を今でも持っている。今現在は、技術的理由により特に斜交型しか扱っていないが、それでも十分一般的議論が展開できるのではと思っている。

まず本章では、局所構造の決定の部分について述べよう。

用語の準備をする。以降、x がΓの点集合の時$x \in \Gamma$と書く事にする。グラフΓにおいて、∂ $(= \partial_\Gamma)$ をその距離関数とし、$\Gamma_i(x) = \{y \in \Gamma \mid \partial(x,y) = i\}$ とする。$\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$ とする。$y \in \Gamma(x)$ の時、$x \sim y$と書こう。

$x_1, \cdots, x_i \in \Gamma$に対し、$\Gamma(x_1, \cdots, x_i) = \cap_{1 \le j \le i}\Gamma(x_j)$ とする。

$\partial(x,y) = i \ge 1$ なる$x, y \in \Gamma$に対し、$C(x;y) = \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)$ とする。

次のΓ上の関係を定義する。

$$
\begin{aligned}
R_{(1)} = \quad & \{(x,x) \mid x \in \Gamma\}, \\
R_{(2)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x \sim y\}, \\
R_{(2,2)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 2, |\Gamma(x,y)| = 2\}, \\
R_{(2,2)_1} = \quad & \{(x,y) \in R_{(2,2)} \mid \Gamma(y) \cap R_{(2,3)}(x) \neq \emptyset\}, \\
R_{(2,2)_2} = \quad & \{(x,y) \in R_{(2,2)} \mid \Gamma(y) \cap R_{(2,3)}(x) = \emptyset\}, \\
R_{(3)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 2, |\Gamma(x,y)| = 3\}, \\
R_{(2,2,2)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 3, |C(y;x)| = |R_{(2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 3\}, \\
R_{(2,3)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 3, |C(y;x)| = 4, \\
& |R_{(2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 3, |R_{(3)}(x) \cap \Gamma(y)| = 1\}, \\
R_{(4)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 3, |C(y;x)| = 6, \\
& |R_{(2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 2, |R_{(3)}(x) \cap \Gamma(y)| = 4\}.
\end{aligned}
$$

ただし、$R_t(x) = \{y \in \Gamma \mid (x,y) \in R_t\}$ とする。$R_{t_1,\cdots,t_i} = \cup_{1 \le j \le i} R_{t_j}$ とする。

$\Lambda = \{(1), (2), (2,2), (2,2)_1, (2,2)_2, (3), (2,2,2), (2,3), (4)\}$ とする。

さて、[5] で言及した事を繰り返すが (その前に [3] で既に、少し違った形で同様なことが言及されているが)、S_nのみならず、$Sp_{2m}(2)$, $O^{\pm}_{2m}(2)$, $W(D_n)$, $W(E_l)$ $(l = 6,7,8)$ などで構成される「斜交型の3互換の有限群」と呼ばれる群の系列において、その3互換 (の共役類) におけるケイリーグラフは、局所構造の性質として次の条件を満たしている。

Condition A. There exists no 4-tuple (x, y, z, u) of vertices in Γ such that $x \sim y \sim z \sim u \sim x$, $(x, z) \in R_{(2,2)}$, and that $(y, u) \in R_{(3)}$.

Condition B. Let $x, y \in \Gamma$ be vertices such that $(x, y) \in R_{(3)}$. Then there exists another vertex $z \in \Gamma$ such that $\Gamma(x, y) \subset \Gamma(z)$.

Condition *C*. The following hold.

(i) R_λ is symmetric for $\lambda \in \Lambda$.
(ii) $R_\lambda \neq \emptyset$ for $\lambda \in \{(1), (2), (2,2)_1, (3)\}$.
(iii) For $x, y \in \Gamma$, $\partial(x, y) = 2$ iff $(x, y) \in R_{(2,2),(3)}$.
(iv) For $x, y \in \Gamma$, $\partial(x, y) = 3$ iff $(x, y) \in R_{(2,2,2),(2,3),(4)}$.
(v) p^λ_μ exists for $(\lambda, \mu) \in \{((1), (2)), ((2), \mu), ((2,2)_i, \mu), ((3), \mu)\}$ $(i \in \{1, 2\},\ \mu \in \Lambda)$. Moreover, $p^\lambda_\mu = 0$ for $(\lambda, \mu) \in \{((2), (2)), ((3), (3)), ((3), (2,2)), ((2,2), (2,2))\}$.

Remarks. (1) Condition C (v) におけるp^λ_μは、アソシエーションスキーム$\mathcal{X}(G)$におけるパラメータ$p^\lambda_{(2),\mu}$ $(= p^\lambda_{\mu,(2)})$ と同一。実は、Condition Cは、アソシエーションスキーム$\mathcal{X}(G)$のパラメータの情報の一部となっている。(それらをexplicitに求める事は、$\mathcal{X}(G)$の局所構造を観察すれば容易に得られる。)

(2) S_n, $Sp_{2m}(2)$, $O^\pm_{2m}(2)$, $W(E_l)$ $(l = 6, 7, 8)$ においては、$R_{(2,2)_2} = \emptyset$となっている一方、$W(D_n)$においては$R_{(2,2)_2} \neq \emptyset$となっている。

(3) Condition Bから容易にCondition Aが導かれる。一方、S_n, $Sp_{2m}(2)$, $O^\pm_{2m}(2)$, $W(E_l)$ $(l = 6, 7, 8)$については、本質的には[3]により、Condition AからCondition Bが導かれる、つまりCondition AとBは (Condition Cを仮定した上で) 同値な条件となる。$W(D_n)$については以前冨山氏と共同で、アソシエーションスキームの構造 (パラメータ) とCondition Aに類する仮定を与えた上でCondition Bを導く事を試みたが、未だ成功していない。

Lemma 1 Let Γ be a graph satisfying Condition B and C. Suppose $R_{(2,2)_2} \neq \emptyset$. Then the following hold.

(1) $R_{(2,2,2)} = R_{(2,2,2)_1} \cup R_{(2,2,2)_2} \cup R_{(2,2,2)_3}$, where

$$R_{(2,2,2)_1} = \{(x, y) \in R_{(2,2,2)} \mid |R_{(2,2)_2}(x) \cap \Gamma(y)| = 0\},$$
$$R_{(2,2,2)_2} = \{(x, y) \in R_{(2,2,2)} \mid |R_{(2,2)_2}(x) \cap \Gamma(y)| = 1\},$$
$$R_{(2,2,2)_3} = \{(x, y) \in R_{(2,2,2)} \mid |R_{(2,2)_2}(x) \cap \Gamma(y)| = 3\}.$$

(2) $R_{(4)} = R_{(4)_1} \cup R_{(4)_2}$, where

$$R_{(4)_1} = \{(x, y) \in R_{(4)} \mid R_{(2,2)_2}(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset\},$$
$$R_{(4)_2} = \{(x, y) \in R_{(4)} \mid R_{(2,2)_1}(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset\}.$$

Remark. $W(D_n)$については$R_{(2,2,2)_3} = \emptyset$となっている。

$2 \times Sp_{2m}(2)$ （$Sp_{2m}(2)$ でない事に注意）、$O^{\pm}_{2m}(2)$、 $W(D_n)$、$W(E_l)$ $(l = 6, 7, 8)$ において、次が成り立つ。

Condition D: The following hold.

(i) There exists no cycle of length 7.

(ii) For any pair of vertices $(x, y) \in R_{(4)}$,

$$\Gamma_4(x) \cap \Gamma(y) \subset R_{(5),(2,4),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3})}(x),$$

where

$$\begin{aligned}
R_{(5)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 4, |R_{(4)}(x) \cap \Gamma(y)| = 5, \\
& |R_{(2,3)}(x) \cap \Gamma(y)| = 5, |R_{(2,2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 0\}, \\
R_{(2,4)} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 4, |R_{(4)}(x) \cap \Gamma(y)| = 1, \\
& |R_{(2,3)}(x) \cap \Gamma(y)| = 4, |R_{(2,2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 2\}, \\
R_{(\bar{2},\bar{2})} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 4, |R_{(4)}(x) \cap \Gamma(y)| = 12, \\
& |R_{(2,3)}(x) \cap \Gamma(y)| = |R_{(2,2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 0\}, \\
R_{(\bar{1},\bar{3})} = \quad & \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma \mid \partial(x,y) = 4, |R_{(4)}(x) \cap \Gamma(y)| = 9, \\
& |R_{(2,3)}(x) \cap \Gamma(y)| = 0, |R_{(2,2,2)}(x) \cap \Gamma(y)| = 3\}.
\end{aligned}$$

(iii) R_λ is symmetric for $\lambda \in \{(2,2,2)_1, (2,2,2)_2, (4)_1, (4)_2, (5), (2,4), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3})\}$.

(iv) $p^{(4)}_\lambda$ exists for $\lambda \in \{(5), (2,4), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3})\}$.

ここで再び用語の準備をする。Gを３互換の群、Dをその３互換の生成元、$P_i = P_i(D)$をDの元による長さiの列全体の集合とする。便宜上長さ０の列1_Pを用意し、$P_0 = \{1_P\}$とする。

$P_{\leq i} = \cup_{0 \leq j \leq i} P_j$, $P = \cup_{i \geq 0} P_i$とする。

$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s), \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_t) \in P$に対し、$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t)$とし、$a \in D$に対し、$(a_1, \cdots, a_s, a)$を$\mathbf{a} * a$と書くことにする。

$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s), \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_s) \in P_s$ $(s \geq 2)$ に対し、

"$(b_i, b_{i+1}) \in \{(a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, (a_i)^{a_{a+1}}), ((a_{i+1})^{a_i}, a_i)\}$ for some $i \in \{1, \cdots, s-1\}$, and $a_j = b_j$ for $j \in \{1, \cdots, s\}$ with $j \notin \{i, i+1\}$"

が成り立つとき、$\mathbf{a} \sim_D \mathbf{b}$と書く事にする。$s \leq 1$の時は"$\mathbf{a} \sim_D \mathbf{b}$ iff $\mathbf{a} = \mathbf{b}$"としよう。

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$について、$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$がいくつかの関係$\sim_D$で結ばれている時、$\mathbf{a} \equiv_1 \mathbf{b}$と書くことにする。

$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s), \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_t) \in P$に対し、$a_1 \cdots a_s = b_1 \cdots b_t$が$G$の中で成り立つ時、$\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$と書く事にする。

$\mathbf{a} \in P$に対し、$\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$となる$\mathbf{b} \in P_r$が存在するような$r$で最小のものを$l(\mathbf{a})$と書くことにしよう。

P_i^+ (resp. P_i^-) を、$l(\mathbf{a}) = i$ (resp. $l(\mathbf{a}) < i$) を満たす$\mathbf{a} \in P_i$たちで構成されるP_iの部分集合とする。$P^+ = \cup_{i \geq 0} P_i^+$、$P^- = \cup_{i \geq 0} P_i^-$とする。

3互換の群(G,D)に対し、

$$\mathcal{L}^D = \{\ \{a,b,a^b=b^a\} \mid a,b \in D, ab \neq ba\}\}$$

とする。この時、次の事実が知られている。

Fact. $\mathcal{D}=(D,\mathcal{L}^D)$ forms a Fischer space.

ここで、Fischer spaceとは、次の2つの公理を満たすpartial linear spaceの事である。

(F1) Each line contains exactly three points.

(F2) If L, L' are distinct lines with a common point, then the subspace $< L, L' >$ generated by $L \cup L'$ is isomorphic to the dual affine plane of order 2 or the affine plane of order 3.

Fischer space $(D,\mathcal{L}^D)$において、条件(F2)の内、"affine plane of order 3"が現れない時、Gは「斜交型の3互換の群」と呼ばれる。

$a \in D$に対して、$A_a = \{b \in D \mid ab \neq ba\}$とする。そして、$a \neq b, ab = ba$なる$a,b \in D$について、$A_a \neq A_b$ (resp. $A_a = A_b$)が成り立つ時、$a \approx_1 b$ (resp. $a \approx_2 b$)と書こう。$ab \neq ba$の時は$a \not\approx b$と書こう。

ΓをCondition Cを満たすグラフとする。この時、$x \in \Gamma$について、

$$\mathcal{L}_x = \{\ \{u,v,w\} \in \Gamma(x)\ :\ |\{u,v,w\}| = 3, |\Gamma(u,v,w)| \geq 2\}$$

とする。

さて本題に戻るが、S_nの互換におけるケイリーグラフにおいて、次の形でその局所構造の特徴付けができる。

Proposition 2 ([6]) Let Γ be a graph. Then the following are equivalent.

(1) Γ satisfies Conditions B and C, and $\{p^\lambda_\mu\}$ corresponds to parameters of $\mathcal{X}(S_n)$.

(2) Let D be the set of 3-transpositions in G.
Then for any $x \in \Gamma$, there exists a mapping $f_3 = f^x_3 : P_{\leq 3} \to \Gamma$ satisfying:

(0) $f_3(1_P) = x$,

(i) For $\mathbf{a} \in P_{\leq 2}$,

$$\Gamma(f_3(\mathbf{a})) = \{f_3(\mathbf{a} * b) \mid b \in D\},$$

and, moreover, the following hold:

(i-a) $(f_3(\mathbf{a} * a), f_3(\mathbf{a} * b)) \in R_{(2,2)_j}$ iff $a \approx_j b$ $(j \in \{1,2\})$,
(i-b) $(f_3(\mathbf{a} * a), f_3(\mathbf{a} * b)) \in R_{(3)}$ iff $a \not\approx b$,
(i-c) $\{f_3(\mathbf{a} * a), f_3(\mathbf{a} * b), f_3(\mathbf{a} * c)\} \in \mathcal{L}_{f(\mathbf{a})}$ iff $\{a,b,c\} \in \mathcal{L}^D$.

(ii) For $\mathbf{a} \in P_{\leq 1}$, and $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in P_2$ with $\mathbf{b} \in P_2^+$, $f_3(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = f_3(\mathbf{a} * \mathbf{c})$ iff $\mathbf{b} \sim_D \mathbf{c}$.

(iii) For $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_{\leq 3}$, $\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$ iff $f_3(\mathbf{a}) = f_3(\mathbf{b})$.

(iv) For $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in P_{\leq 2}$ with $\mathbf{a} \not\equiv_G \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \not\equiv_G \mathbf{c}$, and with $\mathbf{c} \not\equiv_G \mathbf{a}$, and for $a, b, c \in D$, let $\mathbf{a} * a \equiv_G \mathbf{b} * b \equiv_G \mathbf{c} * c$. Then the following hold:

(iv-a) $(f_3(\mathbf{a}), f_3(\mathbf{b})) \in R_{(2,2)_j}$ iff $a \approx_j b$ $(j \in \{1, 2\})$,
(iv-b) $(f_3(\mathbf{a}), f_3(\mathbf{b})) \in R_{(3)}$ iff $a \not\approx b$,
(iv-c) $\{f_3(\mathbf{a}), f_3(\mathbf{b}), f_3(\mathbf{c})\} \in \mathcal{L}_{f(\mathbf{a}*a)}$ iff $\{a, b, c\} \in \mathcal{L}^D$.

(v) For $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_2$ with $\mathbf{a} \not\equiv_G \mathbf{b}$ and $a, b \in D$, let $\mathbf{a}*a \equiv_G \mathbf{b}*b$. Then $f_3(\mathbf{a}*c) = f_3(\mathbf{b}*d)$ iff $(a, b) \sim_D (c, d)$.

$2 \times Sp_{2m}(2)$, $O_{2m}^{\pm}(2)$, $W(D_n)$, $W(E_l)$ $(l = 6, 7, 8)$ においては、次が成り立つ。

Proposition 3 ([6]) Let Γ be a graph satisfying Conditions B,C and D. Assume that $\{p_\mu^\lambda\}$ corresponds to parameters of $\mathcal{X}(G)$, where $G \in \{2 \times Sp_{2m}(2)$, $O_{2m}^{\pm}(2)$, $W(D_n)$, $W(E_l)$ $(l = 6, 7, 8)$ $\}$. Let D be the set of 3-transpositions in G.

Then for any $x \in \Gamma$, there exists a mapping $f_3 = f_3^x : P_{\leq 3} \to \Gamma$ satisfying (0)-(v) in Proposition 2.

Remark. Proposition 2,3 の主張の一部（Fischer space の構成部分）は [3] で既に示されている。([3] では $W(D_n)$ については言及されていないが。)

次章でのべる S_n と $W(D_n)$ のケイリーグラフの特徴付け（全体構造の決定）をする際、f_3 から $f_4, f_5, \cdots$ と徐々に写像を広げていくわけであるが、実は、Propositions 2, 3 は、その行為を行うために必要不可欠な「局所構造」におけるいくつかの補題を本質的に含んでいる。例えば、次の補題はその一例である。

Lemma 4. ([6]) Let Γ be a graph satisfying (1) in Proposition 2 or assumption in Proposition 3. Pick any vertex $x \in \Gamma$, and take vertices $u_1, u_2, u_3, v \in \Gamma(x)$ such that $\{u_1, u_2, u_3\} \in \mathcal{L}_x$ and $v \notin \{u_1, u_2, u_3\}$. Take $y_i \in \Gamma(u_i, v) \setminus \{x\}$ for $i \in \{1, 2, 3\}$. Suppose $(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1) \in R_{(3)}$.

Then $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{L}_v$.

これは、グラフの全体構造の決定の際いろいろな意味で有効であるが、特に S_n 以外の場合（もちろん $W(D_n)$ の場合も）において不可欠な補題であると思われる。

4 全体構造の決定

この研究の１つの目標は、全ての「斜交型の３互換の群」のケイリーグラフを局所構造（のパラメータ的性質）から特徴付ける事であるが、$S_n, W(D_n)$ $(n \geq 4)$ については次の形で完結している。

Theorem 5 ([6]) Let $G \in \{S_n, W(D_n) \mid n \geq 4\}$ with the set of 3-transpositions D, and let Γ be a graph having a mapping $f_3 = f_3^x$ as in Proposition 2 or 3 for any $x \in \Gamma$, and in the case $G = W(D_n)$, satisfying Condition D.

Then for any $x \in \Gamma$, there exists a family of mappings $\{f_i : P_{\leq i} \to \Gamma \mid i \geq 4\}$ satisfying:

(i) $f_i|_{P_{\leq i-1}} = f_{i-1}$ $(i \geq 4)$.

(ii) For $\mathbf{a} \in P_{\leq i-1}$ $(i \geq 4)$,

$$\Gamma(f_i(\mathbf{a})) = \{f_i(\mathbf{a} * b) \mid b \in D\},$$

and, moreover, the following hold:

(ii-a) $(f_i(\mathbf{a} * a), f_i(\mathbf{a} * b)) \in R_{(2,2)_j}$ iff $a \approx_j b$ $(j \in \{1, 2\})$,
(ii-b) $(f_i(\mathbf{a} * a), f_i(\mathbf{a} * b)) \in R_{(3)}$ iff $a \not\approx b$,
(ii-c) $\{f_i(\mathbf{a} * a), f_i(\mathbf{a} * b), f_i(\mathbf{a} * c)\} \in \mathcal{L}_{f_i(\mathbf{a})}$ iff $\{a, b, c\} \in \mathcal{L}^D$.

(iii) For $\mathbf{a} \in P_{\leq i-2}$ $(i \geq 4)$ and $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in P_2^+$, $f_i(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = f_i(\mathbf{a} * \mathbf{c})$ iff $\mathbf{b} \sim_D \mathbf{c}$.

(iv) For $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_{\leq i}$, if $\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$, then $f_i(\mathbf{a}) = f_i(\mathbf{b})$.

(v) For $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in P_{\leq i-1}$ $(i \geq 4)$ with $\mathbf{a} \not\equiv_G \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \not\equiv_G \mathbf{c}$, and with $\mathbf{c} \not\equiv_G \mathbf{a}$, and for $a, b, c \in D$, let $\mathbf{a} * a \equiv_G \mathbf{b} * b \equiv_G \mathbf{c} * c$. Then the following hold:

(v-a) $(f_i(\mathbf{a}), f_i(\mathbf{b})) \in R_{(2,2)_j}$ iff $a \approx_j b$ $(j \in \{1, 2\})$,
(v-b) $(f_i(\mathbf{a}), f_i(\mathbf{b})) \in R_{(3)}$ iff $a \not\approx b$,
(v-c) $\{f_i(\mathbf{a}), f_i(\mathbf{b}), f_i(\mathbf{c})\} \in \mathcal{L}_{f_i(\mathbf{a}*a)}$ iff $\{a, b, c\} \in \mathcal{L}^D$.

(vi) For $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_{i-1}$ $(i \geq 4)$ with $\mathbf{a} \not\equiv_G \mathbf{b}$ and $a, b \in D$, let $\mathbf{a} * a \equiv_G \mathbf{b} * b$. Then $f_i(\mathbf{a} * c) = f_i(\mathbf{b} * d)$ iff $(a, b) \sim_D (c, d)$.

Theorem 5についての考察を以下に記す。

(1) f_3のような局所写像から写像を帰納的に広げていく際、各点の近傍がある種の「幾何構造」(例えば3互換の群においてはFischer space) を保存する事の確認が重要と思われるが、Theorem 5においては(ii)や(v)によりそれを明確にしている。(Lemma 4がここでも有効。)

(2) f_{i-1}が$P_{\leq i-1}$上で定義されていて、それを拡張して写像f_iを$P_{\leq i}$上で定義するとき、次の問題が主要な問題となる。

(a) $\mathbf{a} \in P_{i-1}^+, a \in D$に対し、$f_i(\mathbf{a} * a)$をどのように意味付けるか?
(b) f_iのwell-defindnessの問題。つまり、$\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_{i-1}^+)$ の時、$f_i(\mathbf{a}*a) = f_i(\mathbf{b}*a)$を示す事。

本定理において、まず(a)については、Propositions 2,3から導き出される次の2つの補題が重要な鍵となる。

Lemma 6 ([6]) Let Γ be a graph satisfying (1) in Proposition 2 or the assumption in Proposition 3. Assume that (G, D) corresponds to parameters of Γ. Pick any vertex $z \in \Gamma$. For $a, b, c, e \in D$ with $\{a, b, c\} \in \mathcal{L}^D$ and $e \notin \{a, b, c\}$, let

$$f(a), f(b), f(c), f(e), f(ae), f(be), f(ce), f(ab), f(bc), f(ca)$$

be vertices in Γ such that;

(i) $f(a), f(b), f(c), f(e) \in \Gamma(z)$,

(ii) $f(ab) = f(bc) = f(ca) \in \Gamma(f(a), f(b), f(c)) \setminus \{z\}$,

(iii) $f(xe) \in \Gamma(f(x), f(e)) \setminus \{z\}$ for $x \in \{a, b, c\}$,

(iv) $(f(x), f(y)) \in R_{(3)}$ (resp. $\in R_{(2,2)}$) iff $x \not\approx y$ (resp. $x \approx y$) for $x, y \in \{a, b, c, e\}$,

(v) $(f(xe), f(xy)) \in R_{(3)}$ (resp. $\in R_{(2,2)}$) iff $e \not\approx y$ (resp. $e \approx y$) for $(x, y) \in \{\ (a, b), (b, c), (c, a)\ \}$,

(vi) $(f(ae), f(be)), (f(be), f(ce)), (f(ce), f(ae)) \in R_{(3)}$.

Then there exists a unique vertex

$$w \in \Gamma(f(ae), f(be), f(ce), f(ab))$$

such that $\partial(z, w) = 3$.

Lemma 7 ([6]) Let Γ be a graph satisfying (1) in Proposition 2 or the assumption in Proposition 3. Assume that (G, D) corresponds to parameters of Γ. Pick any vertex $z \in \Gamma$. For $a, b, e \in D$ with $a \approx b$ and $e \notin \{a, b\}$, let

$$f(a), f(b), f(e), f(ae), f(be), f(ab), f(ba)$$

be vertices in Γ such that;

(i) $f(a), f(b), f(e) \in \Gamma(z)$,

(ii) $f(ab) = f(ba) \in \Gamma(f(a), f(b)) \setminus \{z\}$,

(iii) $f(xe) \in \Gamma(f(x), f(e)) \setminus \{z\}$ for $x \in \{a, b\}$,

(iv) $(f(x), f(y)) \in R_{(3)}$ (resp. $\in R_{(2,2)}$) iff $x \not\approx y$ (resp. $x \approx y$) for $x, y \in \{a, b, e\}$,

(v) $(f(xe), f(xy)) \in R_{(3)}$ (resp. $\in R_{(2,2)}$) iff $e \not\approx y$ (resp. $e \approx y$) for $(x, y) = \{\ (a, b), (b, a)\ \}$,

(vi) $(f(ae), f(be)) \in R_{(2,2)}$.

Then there exists a unique vertex

$$w \in \Gamma(f(ae), f(be), f(ab))$$

such that $\partial(z, w) = 3$.

(b) については ((iv) を示すためにも)、Pでの関係$\sim_D, \equiv_1, \equiv_G$の構造を観察する事が鍵となる。例えば、$S_n$については、次の事実が重要となる。($W(D_n)$ については成り立たない。)

Observation. For any $i \geq 0$ and $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_i^+$,

$$\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b} \text{ iff } \mathbf{a} \equiv_1 \mathbf{b}.$$

(3) Theorem 5において、Γ^*は二部グラフである事により、(iv)を示すのに、本質的には

"For $j(\leq i)$ and $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_j^+$, if $\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$, then $f_i(\mathbf{a}) = f_i(\mathbf{b})$."

を示せばよい。一般にΓ^*がodd cycleを持つグラフの場合同様の形の定理を得ようとするならば、例えばP_iを次の3つの集合

$$\begin{aligned} P_i^+ &= \{\mathbf{a} \in P_i \mid l(\mathbf{a}) = i\}, \\ P_i^0 &= \{\mathbf{a} * a \in P_i \mid l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{a} * a) = i - 1\}, \\ P_i^- &= P_i \setminus (P_i^+ \cup P_i^0) \end{aligned}$$

に分割し、

"For $j(\leq i)$, $\mathbf{a} \in P_{j-1}^+$ and $\mathbf{b} \in P_j^0$, if $\mathbf{a} \equiv_G \mathbf{b}$, then $f_i(\mathbf{a}) = f_i(\mathbf{b})$."

を示す事も重要な部分になると思われる。

(4) (iv)に注目してみると、Proposition 2 (2) の(iii)と違い、同値性まで言っていない事が見てとれる。この事により、次の系が得られる。

Corollary 8 ([6]) Let $G \in \{S_n, W(D_n) \mid n \geq 4\}$ with the set of 3-transpositions D, and let Γ^* be the Cayley graph of G with respect to D. Let Γ be a graph having a mapping f_3 as in Proposition 2 or 3, and in the case $G = W(D_n)$, satisfying Condition D.

Then Γ is covered by Γ^*.

この研究においては、ケイリーグラフを「辺にラベルのついたグラフ」ととらえる事を大きな方針としているが、その場合上定理(iv)のような部分において同値性まで示すのはある意味難しい、というより種類の異なる問題となるであろうと予想する。今回の場合に限っていえば、筆者は次の予想を持っているが。

Conjecture. Let G, D, Γ^*, Γ be as in Theorem 5.

Then Γ is isomorphic to Γ^*.

参考文献

[1] M. Tomiyama, Characterization of the group association scheme of A_5 by its intersection numbers, J Math. Soc. Japan (1998), vol. 50, No. 1, 43-56.

[2] M. Tomiyama, Characterization of the group association scheme of $PSL(2,7)$, preprint.

[3] M. Tomiyama, On local structure of the group association schemes of 3-transposition groups, preprint.

[4] M. Tomiyama and N. Yamazaki, Characterization of the group association scheme of the symmetric group, Europ. J. Combin. (1998), 19, 237-255.

[5] N. Yamazaki, On the characterization of certain Cayley graphs, 第１４回代数的組合せ論研究集会報告集（国際基督教大学）。

[6] N.Yamazaki, On Cayley graphs of 3-transposition groups, in preparation.

[7] S. Yoshiara, An example of non-isomorphic group association schemes with the same parameters, Europ. J. Combin. (1997) 18, 721-738.

山崎 則男（Norio Yamazaki）
日本学術振興会特別研究員（ＰＤ）
九州大学大学院数理学研究科所属
e-mail: norio@math.kyushu-u.ac.jp